

Robotik I: Einführung in die Robotik

Kinematik

Tamim Asfour, Rüdiger Dillmann

Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)



Robotermodellierung

- Geometrische Modellierung
 - **Geometrie:** Mathematische Beschreibung der **Form von Körpern**
- Kinematische Modellierung
 - **Kinematik:** Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der **Bewegungszustände mechanischer Systeme**
- Dynamische Modellierung
 - Dynamik:** Untersuchung der **Bewegung von Körpern** als Folge der auf sie wirkenden **Kräfte und Momente**

Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - Direktes Kinematisches Problem
 - Beispiele
 - Jacobi-Matrizen
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - Repräsentation der Erreichbarkeit

- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Inhalt

■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Kinematisches Modell

■ Definition

- Das **kinematische Modell** eines Roboters beschreibt die Zusammenhänge zwischen dem **Raum der Gelenkwinkel** (Roboterkoordinaten, Konfigurationsraum) und dem **Raum der Lage des Endeffektors** in Weltkoordinaten (Arbeitsraum, Kartesischer Raum).

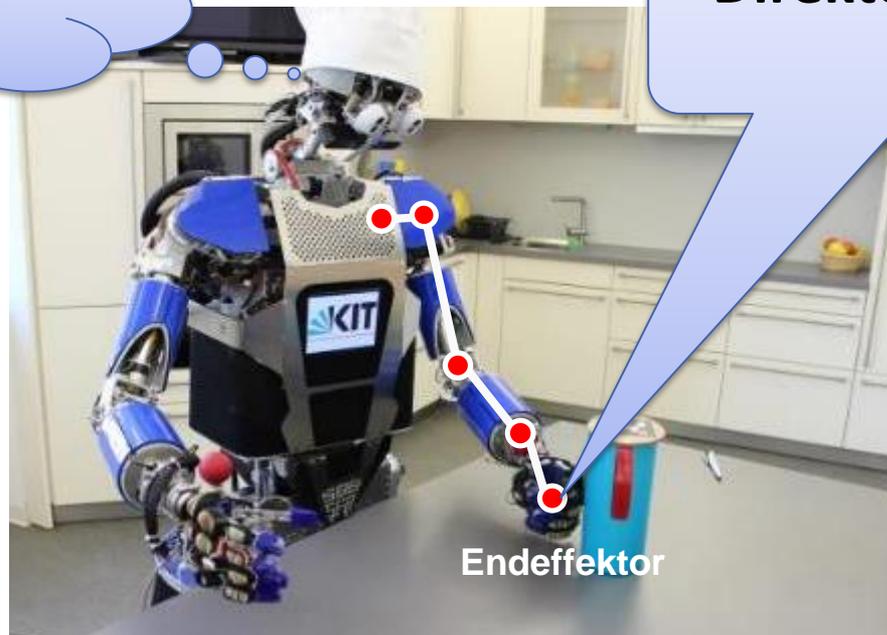
■ Einsatzbereiche

- Bestimmung des Zusammenhangs zwischen **Gelenkwerten** und **Stellungen** des Roboters
- **Erreichbarkeitsanalyse**
- Relation zwischen **Körpern des Roboters** (Selbstkollision)
- Relation zur **Umgebung** (Kollisionserkennung)

Vorwärtskinematik

- **Direktes** kinematisches Problem (Vorwärtskinematik)
 - **Bestimmung der Lage des Endeffektors** aus den Gelenkwinkelstellungen des Roboters.

Wo ist meine Hand?



Direkte Kinematik:
HIER!

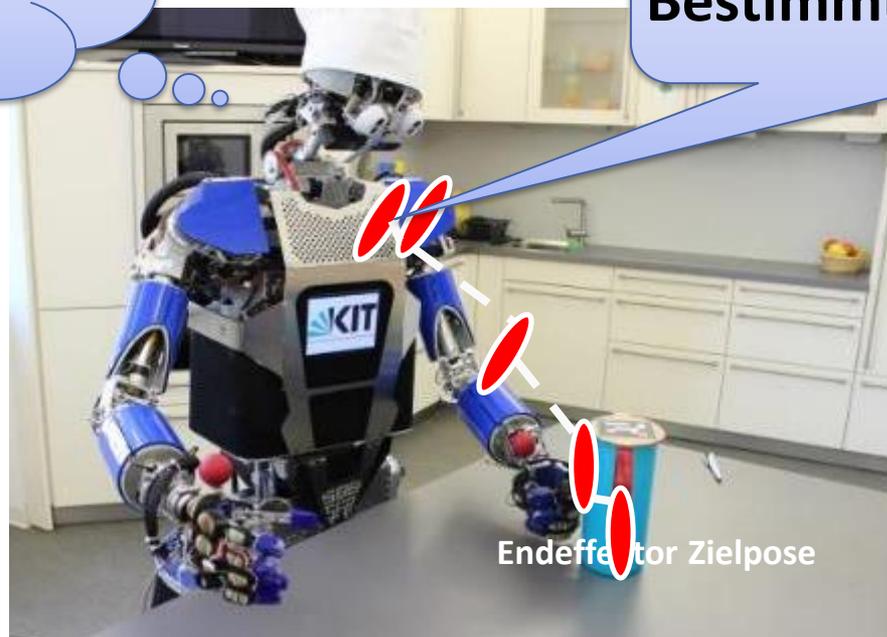
Endeffektor

Inverse Kinematik

- **Inverses** kinematisches Problem (Rückwärtskinematik)
 - **Bestimmung der Gelenkwinkelstellungen** zu einer gewünschten Lage des Endeffektors.

Wie bewege ich
meine Hand
zum Becher?

**Inverse Kinematik:
Bestimmt die Gelenkwinkel**

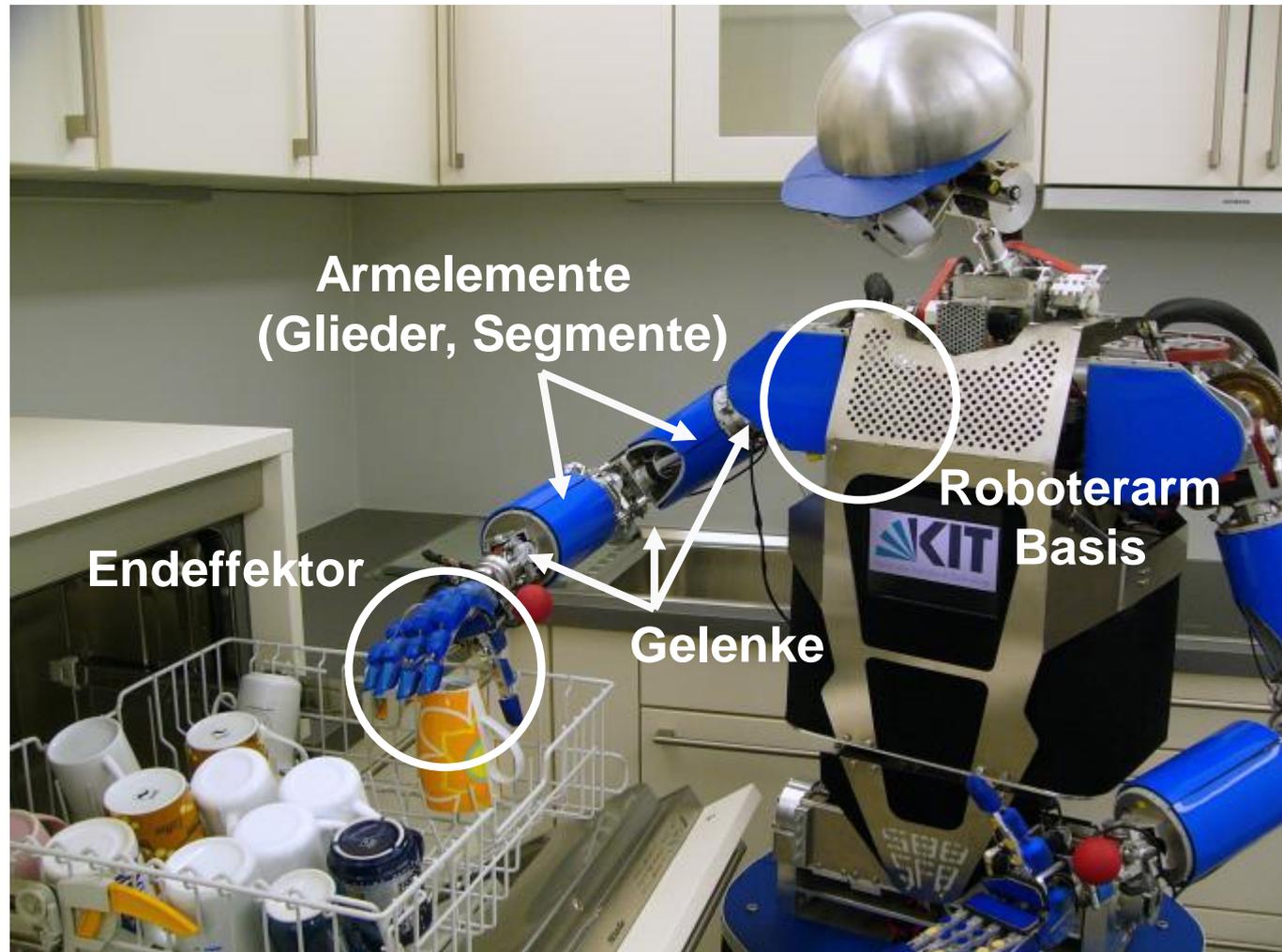


Inhalt

- Kinematisches Modell
 - **Kinematische Kette**
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - Direktes Kinematisches Problem
 - Beispiele
 - Jacobi-Matrizen
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - Repräsentation der Erreichbarkeit

- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Elemente einer kinematischen Kette

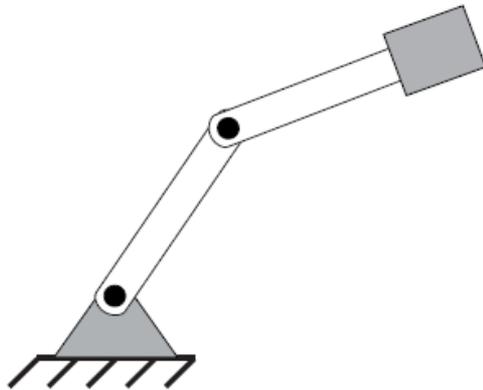


Kinematische Kette

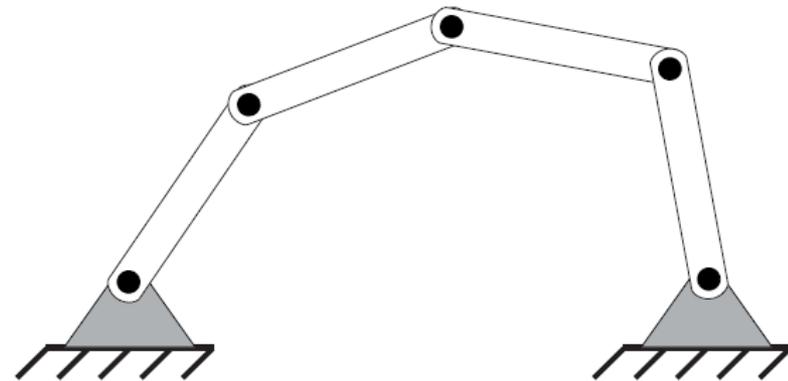
■ Definition

- Eine kinematische Kette wird von **mehreren Körpern** gebildet, die durch **Gelenke kinematisch verbunden** sind (z. B.: Roboterarm).

■ Typen



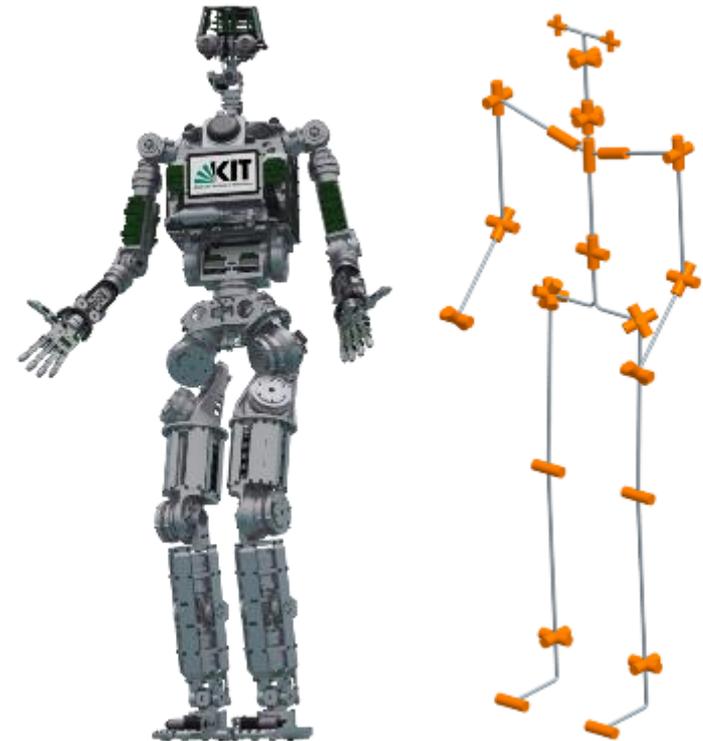
Offene kinematische Kette



Geschlossene kinematische Kette

Kinematische Kette: Konventionen

- Jedes **Armelement** entspricht einem **starr**en Körper.
- Jedes Armelement ist mit dem nächsten durch ein **Gelenk** verbunden.
- Bei Schub- und Rotationsgelenken: Jedes **Gelenk** hat nur **einen Bewegungsfreiheitsgrad** (Rotation oder Translation)
- **Kinematische Parameter:**
 - Gelenkdefinition (z.B. Rotationsachse)
 - Transformation zwischen den Gelenken



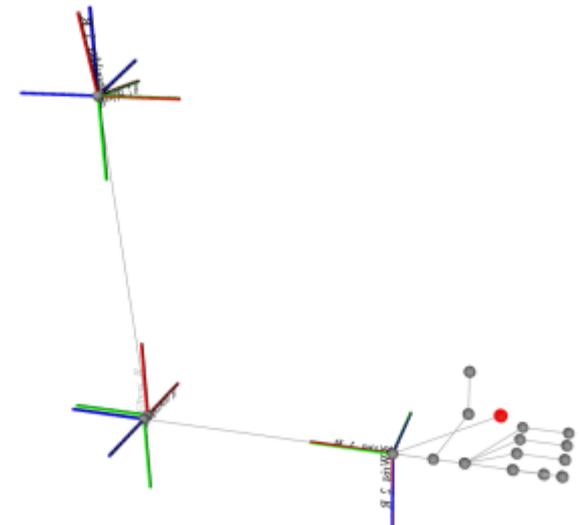
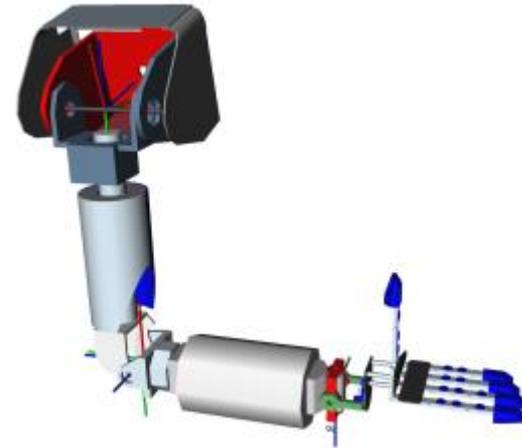
Kinematische Parameter

■ Gelenkparameter

- Rotationsgelenk: Rotationsachse
- Schubgelenk: Translationsrichtung
- ...

■ Spezifikation der Lage der Gelenke zueinander

- Feste Transformation zwischen zwei Gelenken
- Definiert die lokalen Koordinatensysteme der Gelenke
- Transformation von Gelenk $i - 1$ zu Gelenk i durch Transformationsmatrix ${}^{i-1}T_i$



Anzahl Parameter der kinematischen Kette

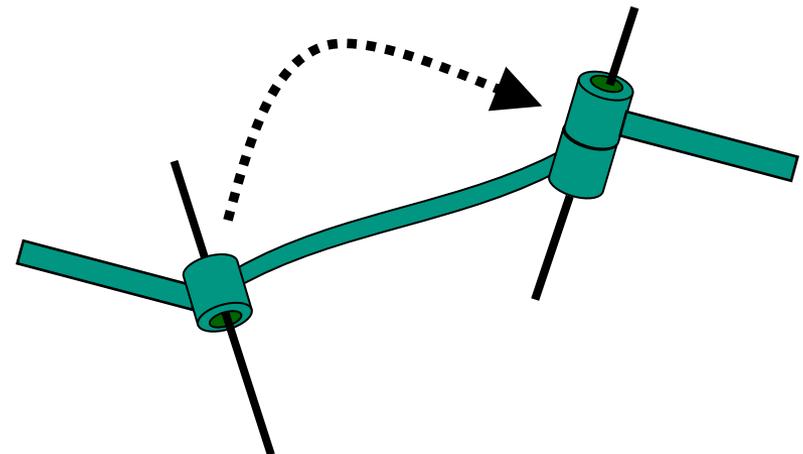
- Für jedes Glied muss eine **Transformation** bestimmt werden:
 - 3 Rotationsparameter
 - 3 Translationsparameter
- **6 Parameter** pro Glied der kinematischen Kette

Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - **Denavit-Hartenberg Konvention**
 - Direktes Kinematisches Problem
 - Beispiele
 - Jacobi-Matrizen
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - Repräsentation der Erreichbarkeit
- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Denavit-Hartenberg (DH) Konvention

- Ziel
 - **Reduktion der Parameter** zur Beschreibung eines Armelementes
- Eigenschaften
 - Systematische Beschreibung der Beziehungen (**Translationen** und **Rotationen**) **zwischen benachbarten Gelenken**
 - Reduktion der Anzahl **Parameter von 6 auf 4**



Literatur: Denavit, Hartenberg: „A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Bases on Matrices“, Journal of Applied Mechanics, 1955, vol 77, pp 215-221

DH Konvention für Wahl der Koordinatensysteme

- Jedes Koordinatensystem wird auf Basis der folgenden drei Regeln bestimmt:
 1. Die z_{i-1} -Achse liegt entlang der **Bewegungsachse** des **i -ten Gelenks**.
 2. Die x_i -Achse verläuft entlang der gemeinsamen **Normalen** (*common normal*) von z_{i-1} und z_i . Dabei zeigt sie weg von z_{i-1} .
 3. Die y_i -Achse vervollständigt das Koordinatensystem entsprechend der **Rechte-Hand-Regel**.

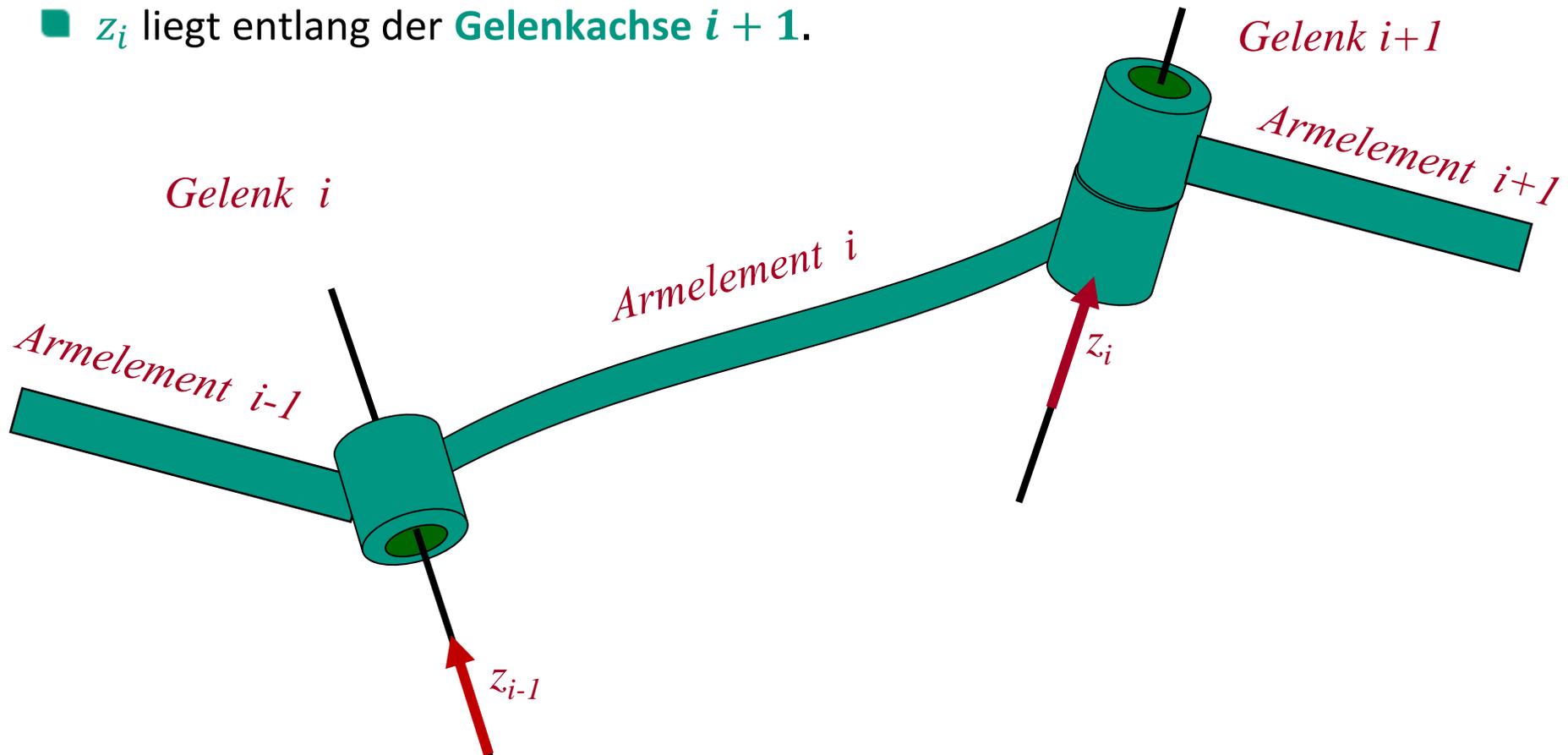
$$i \in \{Basis, 1, \dots, n\}$$

→ Herleitung der Parameter für Armelement und Gelenk

- Anmerkung: In der Literatur finden sich auch andere Varianten der DH-Konvention

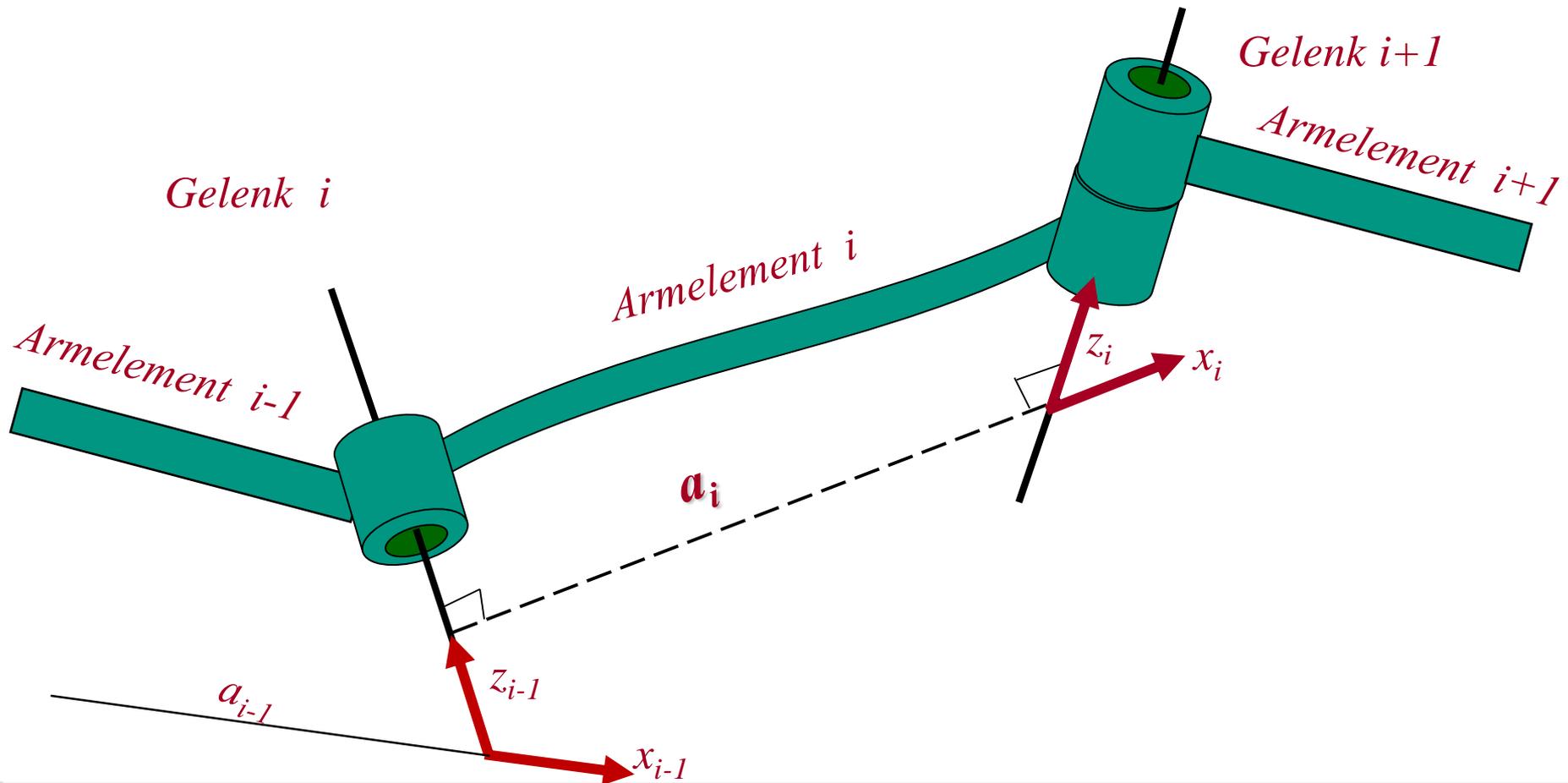
DH-Konvention: Parameter des Armelements

- Jedes **Armelement** i ist durch zwei begrenzende **Gelenke** i und $i + 1$ eingebunden.
- z_i liegt entlang der **Gelenkachse** $i + 1$.



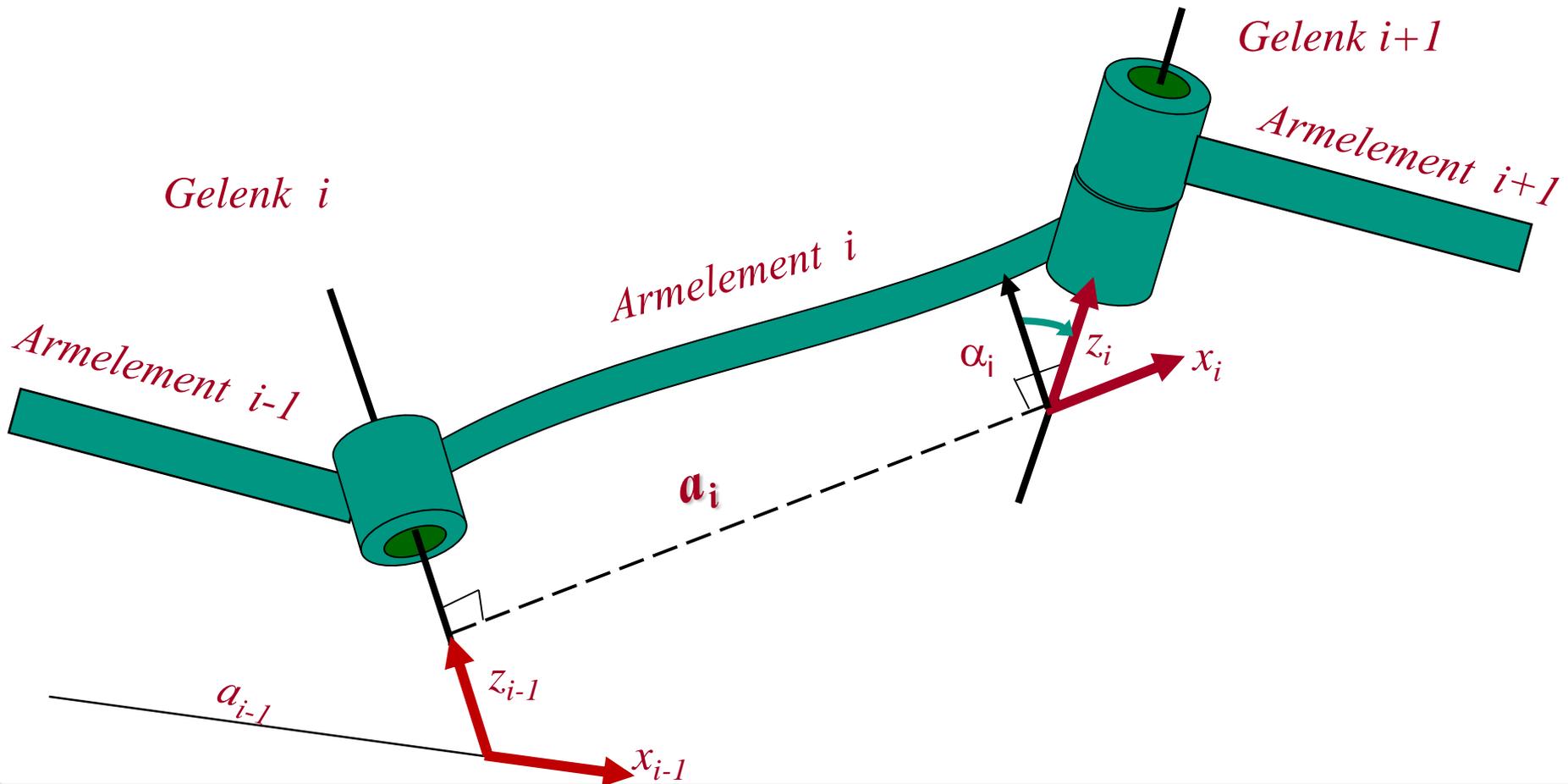
DH-Konvention: Parameter des Armelements II

- Die **Armelementlänge** a_i beschreibt den **Abstand** von z_{i-1} zu z_i .
- x_i liegt entlang der **Normalen von z_{i-1} und z_i** und zeigt weg von z_{i-1} .



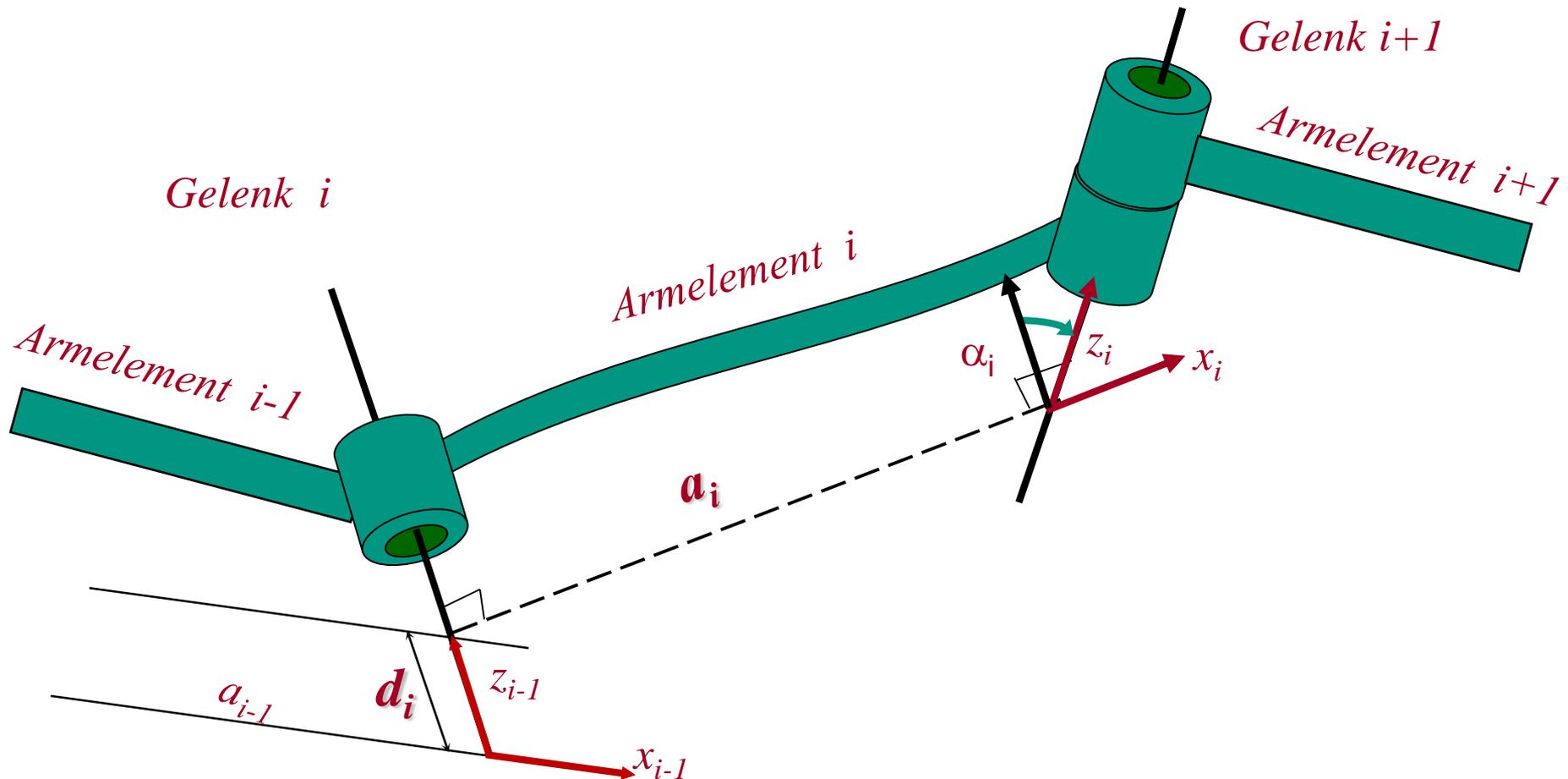
DH-Konvention: Parameter des Armelements III

- Die **Armelementverwindung** α_i beschreibt den **Winkel** von z_{i-1} zu z_i **um** x_i .



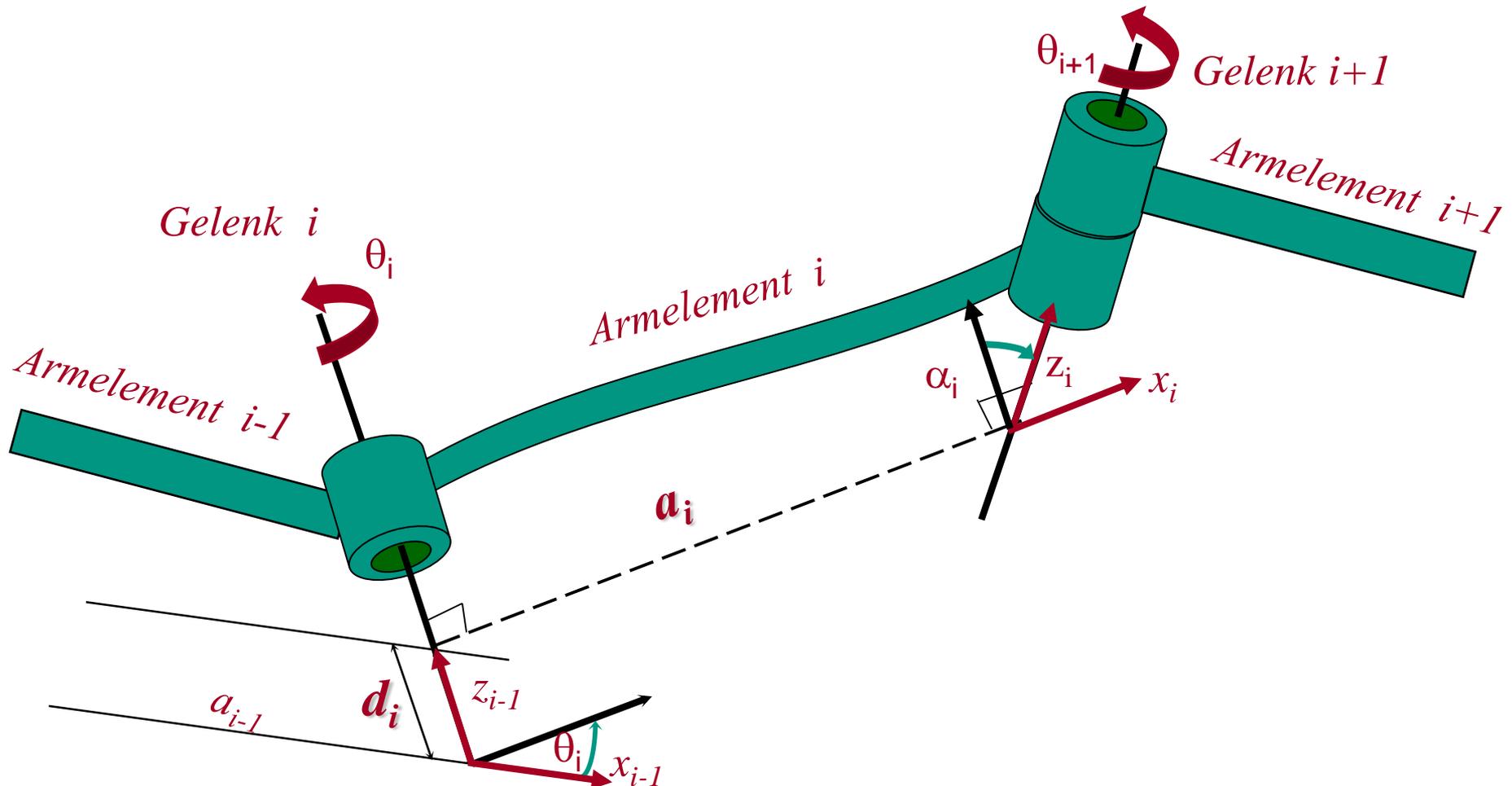
DH-Konvention: Gelenkparameter

- Der **Gelenkabstand** d_i ist der Abstand zwischen der x_{i-1} -Achse und x_i -Achse entlang der z_{i-1} Achse.



DH-Konvention: Gelenkparameter II

- Der **Gelenkwinkel** θ_i ist der Winkel von x_{i-1} zu x_i **um** Z_{i-1} .



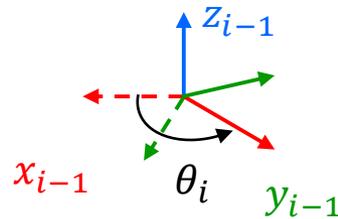
Denavit-Hartenberg Parameter: DH-Parameter

| Parameter | Symbol | Rotationsgelenk | Schubgelenk |
|-----------------|----------|-----------------|-----------------|
| Armelementlänge | a | invariant | invariant |
| Verwindung | α | invariant | invariant |
| Gelenkabstand | d | invariant | variabel |
| Gelenkwinkel | θ | variabel | invariant |

DH-Transformationsmatrizen

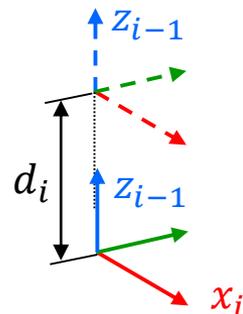
Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

1. Eine **Rotation** θ_i um die z_{i-1} -Achse, damit die x_{i-1} -Achse parallel zur x_i -Achse liegt.



$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Eine **Translation** d_i entlang der z_{i-1} -Achse zu dem Punkt, wo sich z_{i-1} und x_i schneiden.



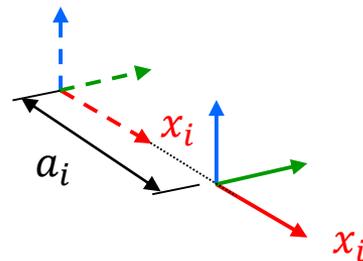
$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-Transformationsmatrizen II

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

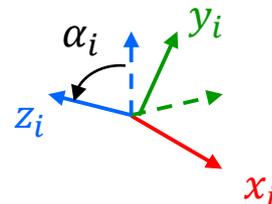
3. Eine **Translation** a_i entlang der x_i -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen.

$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4. Eine **Rotation** α_i um die x_i -Achse, um die z_{i-1} -Achse in die z_i -Achse zu überführen.

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DH-Transformationsmatrizen III

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i} &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Inverse DH-Transformation

Transformation OKS_i zu OKS_{i-1}

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i}^{-1} &= A_{i,i-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -d_i \cdot \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cdot \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Verkettung von DH-Transformationen

- Durch Verkettung der DH-Matrizen lässt sich die Lage der einzelnen **Koordinatensysteme bezüglich** des **Bezugskoordinatensystems** bestimmen.
- Lage des m -ten Koordinatensystems bezüglich der Basis:

$$S_{Basis,m}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{m-2,m-1}(\theta_{m-1}) \cdot A_{m-1,m}(\theta_m)$$

Zusammenfassung: Bestimmung der DH Parameter

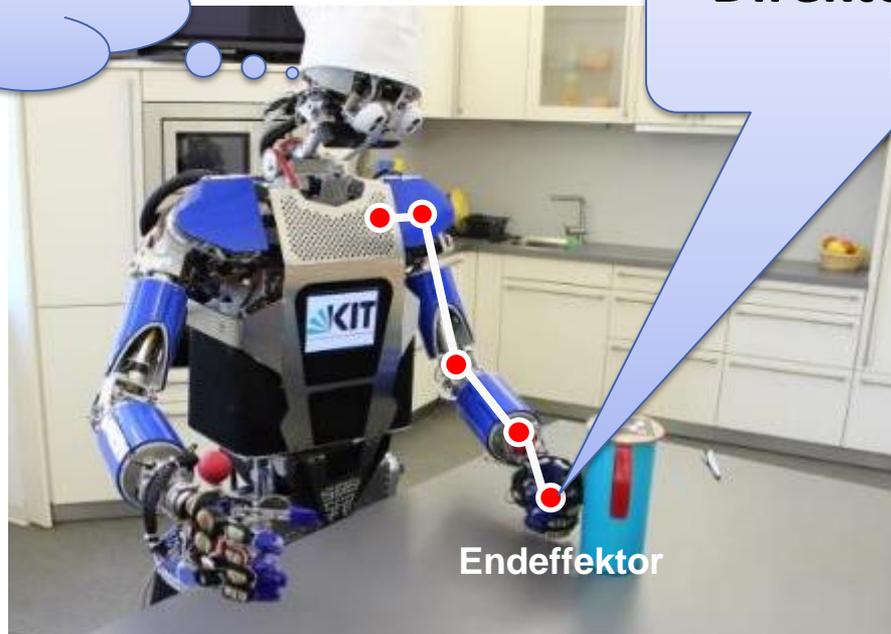
1. **Skizze** des Manipulators
2. Identifiziere und **nummeriere** die **Gelenke** (1, Letztes Glied = n)
3. Zeichne die **Achsen** z_{i-1} für jedes Gelenk i
4. Bestimme die **Parameter** a_i zwischen z_{i-1} und z_i
5. Zeichne die x_i -**Achsen**
6. Bestimme die **Parameter** α_i (Verwindung um die x_i -Achsen)
7. Bestimme die **Parameter** d_i (Gelenkabstand)
8. Bestimme die **Winkel** θ_i um z_{i-1} -Achsen
9. **Gelenk-Transformation-Matrizen** $A_{i-1,i}$ - **verknüpfe** sie

Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - **Direktes Kinematisches Problem**
 - Beispiele
 - Jacobi-Matrizen
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - Repräsentation der Erreichbarkeit
- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Direktes kinematisches Problem

Wo ist meine
Hand?



Direkte Kinematik:
HIER!

Direktes kinematisches Problem

- Aus den DH-Parametern und den Gelenkwinkeln soll die Stellung des Endeffektors (Tool Center Point: TCP) ermittelt werden.
- Die Stellung des Endeffektors (TCP) in Bezug auf das BKS ist gegeben durch:

$$S_{Basis,Greifer}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n)$$

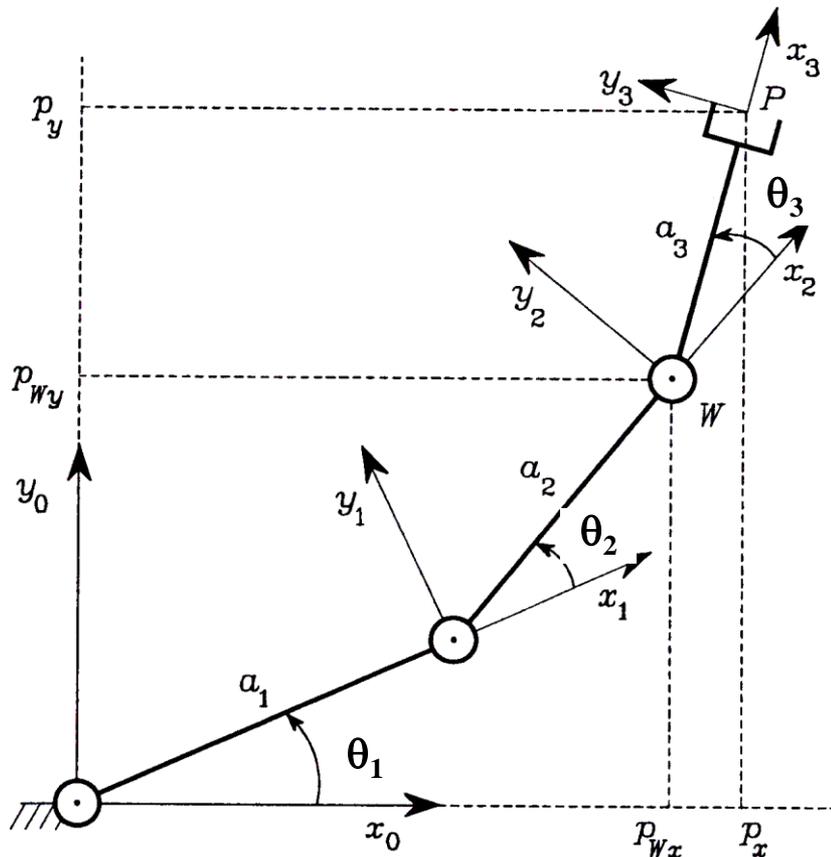
- Gelenkwinkel $\theta_1, \dots, \theta_n$ sind vorgegeben → Stellung des TCP ergibt sich aus obiger Gleichung durch Einsetzen der Gelenkwinkelwerte

Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - Direktes Kinematisches Problem
 - **Beispiele**
 - Jacobi-Matrizen
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - Repräsentation der Erreichbarkeit

- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Beispiel 1



| Gelenk | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|--------|-------|------------|-------|------------|
| 1 | a_1 | 0 | 0 | θ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | θ_2 |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | θ_3 |

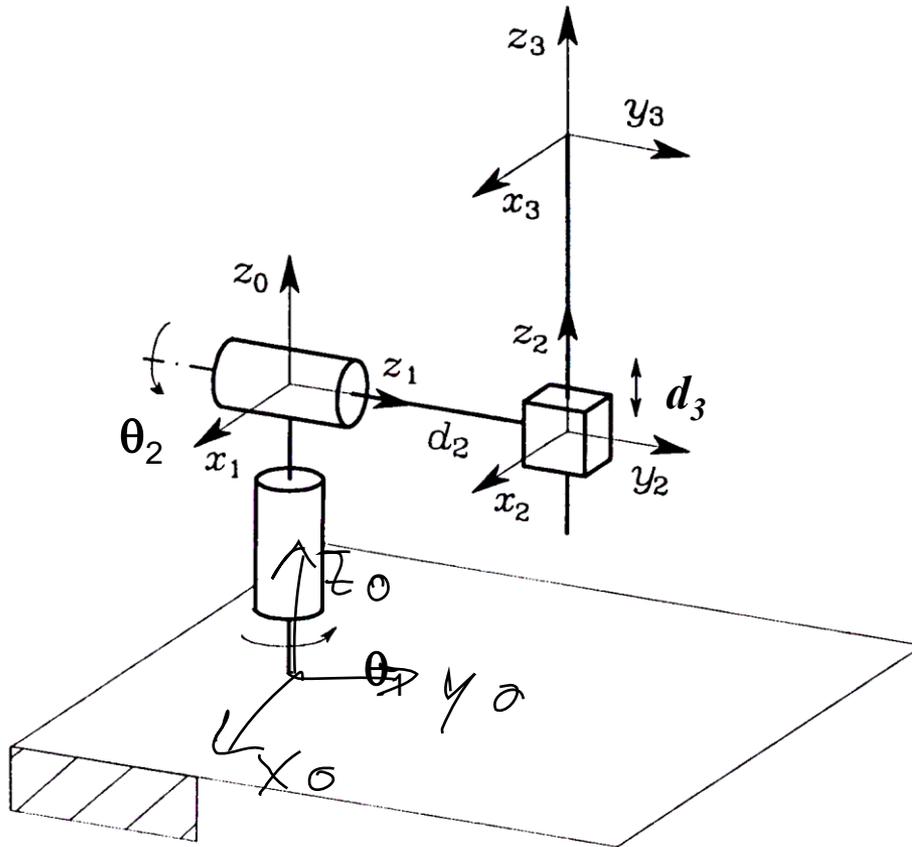
$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Abkürzungen: $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

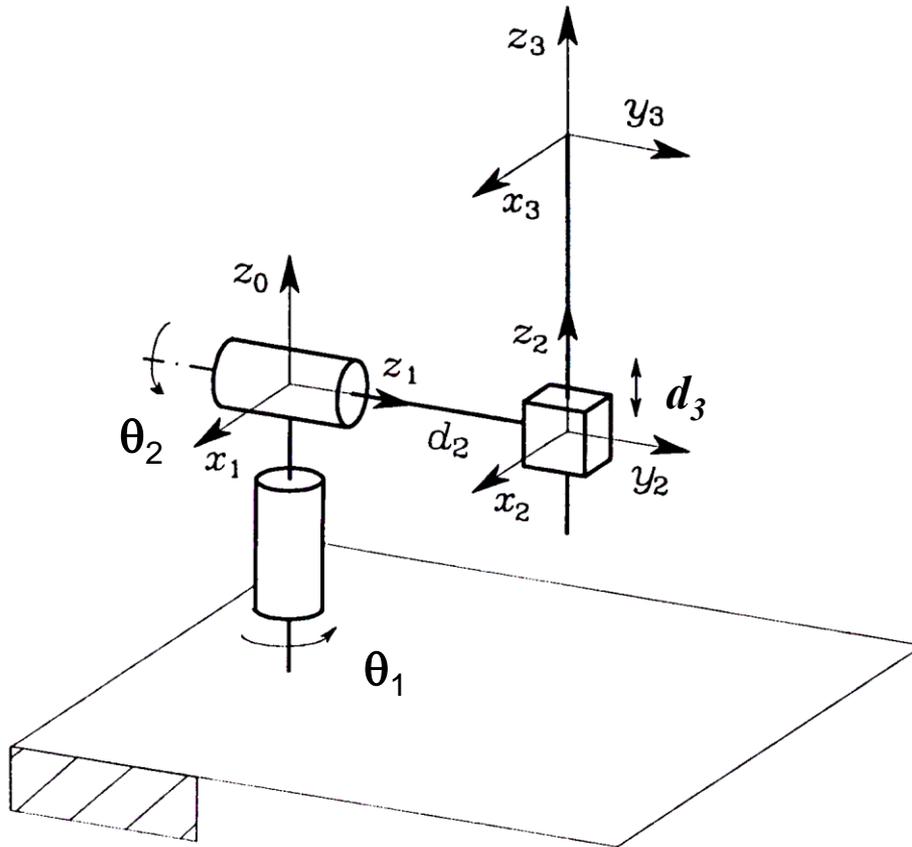
Beispiel 2



| Gelenk | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|--------|-------|------------|-------|------------|
| 1 | 0 | -90 | 0 | θ_1 |
| 2 | 0 | 90 | d_2 | θ_2 |
| 3 | 0 | 0 | d_3 | 0 |

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

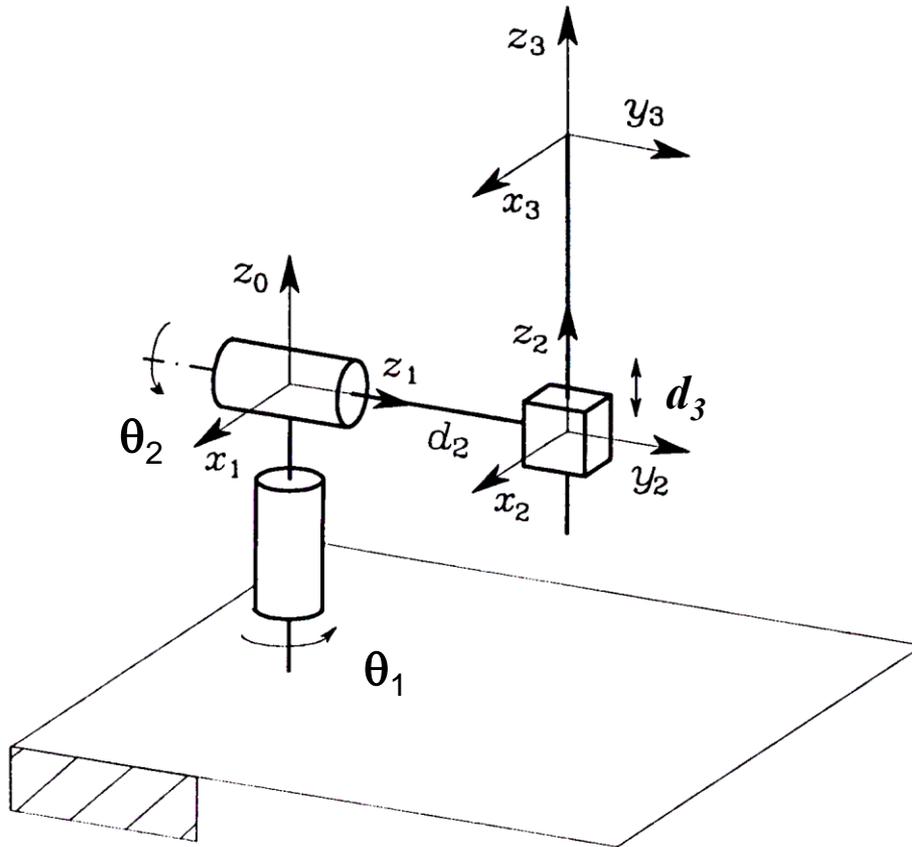
Beispiel 2



| Gelenk | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|--------|-------|------------|-------|------------|
| 1 | 0 | -90 | 0 | θ_1 |
| 2 | 0 | 90 | d_2 | θ_2 |
| 3 | 0 | 0 | d_3 | 0 |

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2



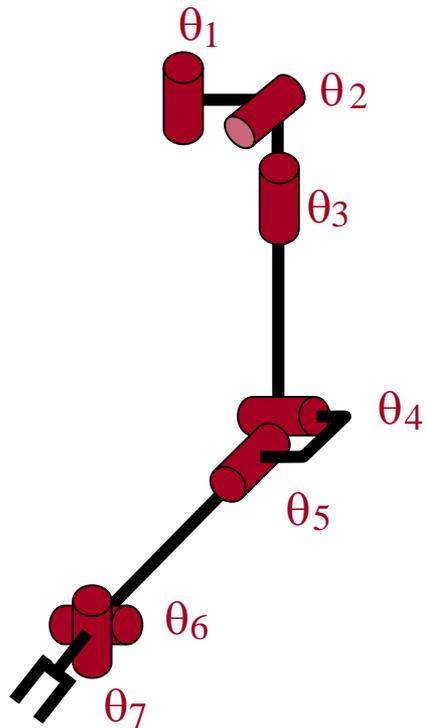
| Gelenk | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|--------|-------|------------|-------|------------|
| 1 | 0 | -90 | 0 | θ_1 |
| 2 | 0 | 90 | d_2 | θ_2 |
| 3 | 0 | 0 | d_3 | 0 |

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1}A_{1,2}A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-Notation: Arm von ARMAR-I



| Gelenk _i | θ_i | a_i | α_i | d_i |
|---------------------|-----------------------|-------|-------------|-------|
| 1 | θ_1 | 30 | -90° | 0 |
| 2 | $\theta_2 - 90^\circ$ | 0 | -90° | 0 |
| 3 | $\theta_3 + 90^\circ$ | 0 | 90° | 223,5 |
| 4 | θ_4 | 0 | -90° | 0 |
| 5 | θ_5 | 0 | 90° | 270,0 |
| 6 | $\theta_6 + 90^\circ$ | 0 | -90° | 0 |
| 7 | θ_7 | 140 | 90° | 0 |



Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - Direktes Kinematisches Problem
 - Beispiele
 - **Jacobi-Matrizen**
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - Repräsentation der Erreichbarkeit

- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Jacobi-Matrix der Vorwärtskinematik

■ Vorwärtskinematik:

Gelenkwinkelstellung → End-Effektor Pose

■ Wie sehen verwandte Beziehungen aus?

■ Gelenkwinkelgeschwindigkeiten → End-Effektor-Geschwindigkeit

■ Drehmomente in Gelenkwinkeln → End-Effektor-Kräfte und –Momente

■ Ansatz: Vorwärtskinematik ableiten (→ Jacobi-Matrix)

Erinnerung: Jacobi-Matrix

- Gegeben eine differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

- Die **Jacobi-Matrix** enthält sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung von f . Für ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$J_f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dabei bezeichnen f_1, \dots, f_m die Komponentenfunktionen von f und x_1, \dots, x_n die Koordinaten in \mathbb{R}^n .

Jacobi-Matrix der Vorwärtskinematik

- **Problem:** Vorwärtskinematik ist matrixwertig

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow SE(3)$$

- Jacobi-Matrix nicht definiert

- **Lösung:** Vektorwertige Repräsentation wählen,
z.B. Roll-Pitch-Yaw

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6$$

End-Effektor Geschwindigkeiten

- **Annahme:** Die kinematische Kette bewege sich entlang einer Trajektorie

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Dann gilt für die End-Effektor Pose $x(t) \in \mathbb{R}^6$ zum Zeitpunkt t :

$$x(t) = f(\theta(t))$$

- Die End-Effektor-Geschwindigkeit hängt linear von den Gelenkgeschwindigkeiten ab (**Kettenregel**):

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f(\theta(t))}{\partial t} = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

End-Effektor Geschwindigkeiten

- Die Jacobi-Matrix setzt kartesische End-Effektor-Geschwindigkeiten in Relation zu Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

- Die folgenden Probleme können mit dieser Beziehung gelöst werden
 1. Gegeben eine kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit, welche Gelenkwinkelgeschwindigkeiten sind notwendig, um diese zu realisieren?
 2. Gegeben die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten, welche kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit wird damit realisiert?

Kräfte und Momente am End-Effektor

- **Annahme:** Die kinematische Kette bewege sich entlang einer Trajektorie

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Die geleistete Arbeit muss unabhängig vom Bezugssystem konstant bleiben (**Reibung vernachlässigt**)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) dt = W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^T \cdot F(t) dt$$

- **Mit:**

$\dot{\theta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, Gelenkgeschwindigkeiten

$\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, Drehmomente in Gelenken

$\dot{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$, End-Effektor Geschwindigkeit

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$, Kraft-Momenten-Vektor am End-Effektor

Kräfte und Momente am End-Effektor

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) dt = W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^T \cdot F(t) dt$$

- Die Beziehung muss für jedes Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gelten, daher:

$$\dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) = \dot{x}(t)^T \cdot F(t)$$

- Bekannte Beziehung zwischen End-Effektor-Geschwindigkeit und Jacobi-Matrix:

$$\dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) = \dot{\theta}(t)^T \cdot J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

- Da $\dot{\theta}(t)$ beliebig ist, folgt:

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

Kräfte und Momente am End-Effektor

- Die Jacobi-Matrix setzt Kräfte und Momente am End-Effektor in Relation zu Drehmomenten in den Gelenken

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

- Die folgenden Probleme können mit dieser Beziehung gelöst werden
 1. Gegeben eine Kraft am End-Effektor, welche Drehmomente müssen in den Gelenken wirken, um dieser Kraft zu widerstehen?
 2. Gegeben die Drehmomente in den Gelenken, welche Kräfte und Momente wirken dadurch am (fixierten) End-Effektor?

Berechnung der Jacobi-Matrix

- Jede Spalte der Jacobi-Matrix korrespondiert zu einem Gelenk θ_i der kinematischen Kette

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

- **Ansatz:** Die numerische Berechnung der Jacobi-Matrix verläuft spaltenweise

Berechnung der Jacobi-Matrix

■ 1. Fall: Translationsgelenk

- **Annahme:** Das j -te Gelenk führe eine Translation in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$ durch.
- Dann gilt:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

■ 2. Fall: Rotationsgelenk

- **Annahme:** Das j -te Gelenk führe eine Rotation um die Rotationsachse $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$, an der Position $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^3$ durch.
- Dann gilt:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_j) \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Zusammenfassung: Jacobi-Matrix

■ Jacobi Matrix:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

■ Eigenschaften

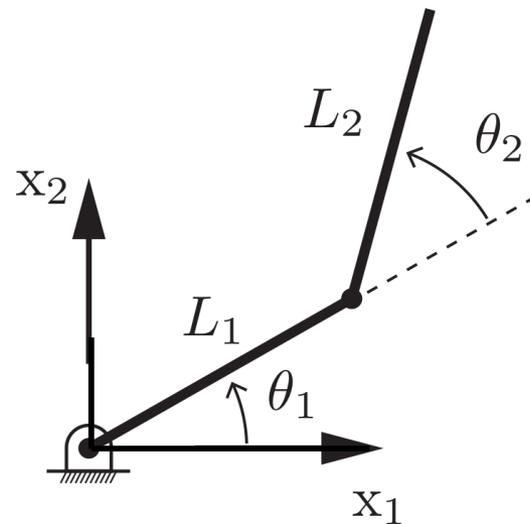
- J_f beschreibt die Beziehung zwischen
 - Geschwindigkeit der Gelenkwinkel (n-dimensional)
und Geschwindigkeit des Endeffektors (6-dimensional)
 - Drehmomente in Gelenken (n-dimensional)
und Kräfte und Momente am Endeffektor (6-dimensional)
- Jacobi-Matrix ist nur gültig für eine bestimmte Gelenkwinkelkonfiguration

Jacobi-Matrix: Beispiel

- Manipulator mit zwei Gelenken θ_1, θ_2
- Vorwärtskinematik

$$x_1 = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2).$$



Jacobi-Matrix: Beispiel II

■ Vorwärtskinematik

$$x_1 = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

■ Ableitung

$$\dot{x}_1 = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

■ Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}}_{J_1(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}}_{J_2(\theta)} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix: Beispiel III

■ Endeffektor-Geschwindigkeit (TCP-Geschwindigkeit)

$$\mathbf{v}_{TCP} = J_1(\boldsymbol{\theta})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{\theta})\dot{\theta}_2$$

- Solange $J_1(\boldsymbol{\theta})$ und $J_2(\boldsymbol{\theta})$ nicht linear abhängig sind, kann \mathbf{v}_{TCP} in jede beliebige Richtung in der x_1x_2 -Ebene erzeugt werden

■ Singularitäten

- $J_1(\boldsymbol{\theta})$ und $J_2(\boldsymbol{\theta})$ linear abhängig $\rightarrow J(\boldsymbol{\theta})$ wird singulär
- z.B. bei $\theta_2 = 0^\circ$
- Die möglichen Bewegungen des Endeffektors sind eingeschränkt

Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - Direktes Kinematisches Problem
 - Beispiele
 - Jacobi-Matrizen
 - **Singularitäten und Manipulierbarkeit**
 - Repräsentation der Erreichbarkeit

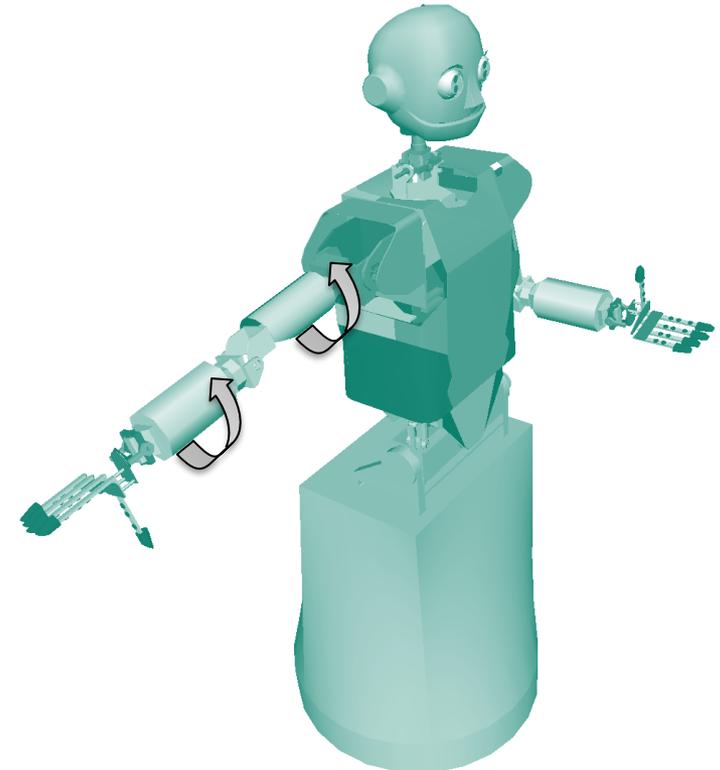
- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Singularitäten

- Eine kinematische Kette ist in einer **singulären Konfiguration**, wenn die zugehörige Jacobi-Matrix nicht vollen Rang hat
 - Zwei oder mehr Spalten von J_f sind linear abhängig

- Die Jacobi-Matrix ist nicht invertierbar
 - Bestimmte Bewegungen unmöglich

- In der Umgebung von Singularitäten können **große Gelenkgeschwindigkeiten** nötig werden, um eine End-Effektor-Geschwindigkeit zu halten.

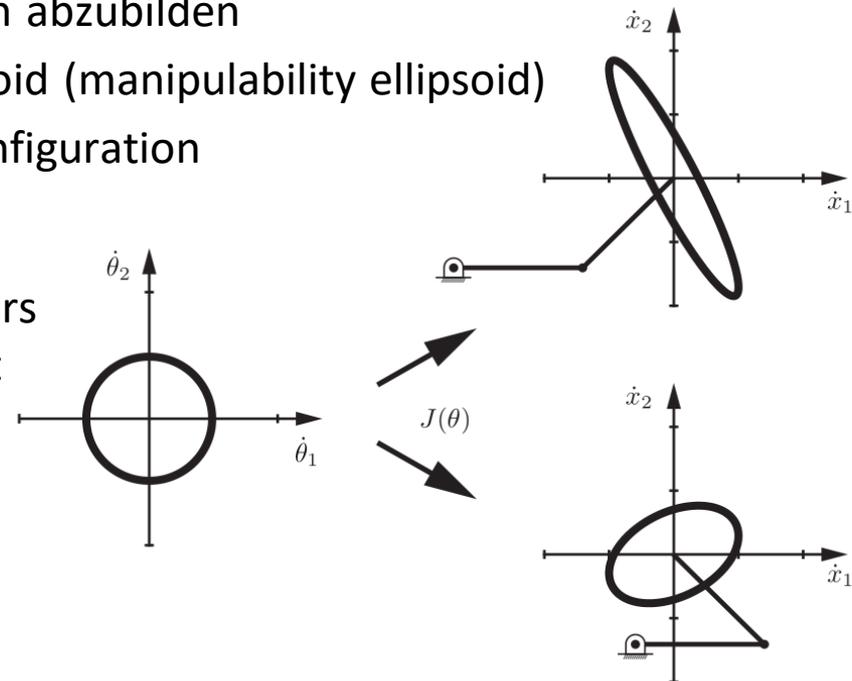


Manipulierbarkeit (Manipulability)

- Ein Maß für die Bewegungsfreiheit „manipulability“ des End-Effektors
- Manipulierbarkeits-Ellipsoid
 - Nutze $J(\theta)$ um Einheitskreis der Gelenkwinkel-Geschwindigkeiten in den Raum der Endeffektor-Geschwindigkeiten abzubilden
 - Resultat: Manipulierbarkeits-Ellipsoid (manipulability ellipsoid)
 - Abhängig von der Gelenkwinkelkonfiguration

■ Analyse

- **Kreis:** Bewegungen des Endeffektors in alle Richtungen uneingeschränkt möglich
- **Degenerierte Fälle (Line):** Endeffektor-Bewegung ist eingeschränkt



Manipulierbarkeit: Eigenwertanalyse

■ Konstruiere $A(\theta) = J(\theta)J(\theta)^T \in R^{n \times n}$

■ $A(\theta)$ ist dann:

- Quadratisch
- Symmetrisch
- positiv definit
- Invertierbar

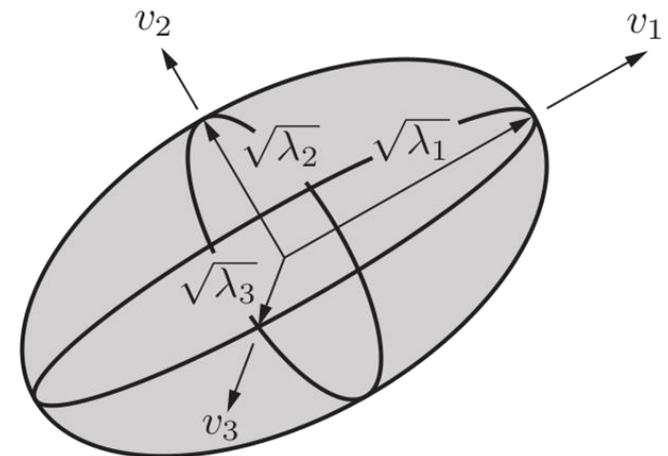
■ Eigenwerte λ und Eigenvektoren v von A

$$Av = \lambda v$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

■ Singulärwerte

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$



Manipulierbarkeit: Berechnung

■ Maße für die Manipulierbarkeit

■ Kleinster Singulärwert

$$\mu_1(\theta) = \sigma_{\min}(A(\theta))$$

■ Inverse Kondition

$$\mu_2(\theta) = \frac{\sigma_{\min}(A(\theta))}{\sigma_{\max}(A(\theta))}$$

■ Determinante

$$\mu_3(\theta) = \det A(\theta)$$

■ Einsatz:

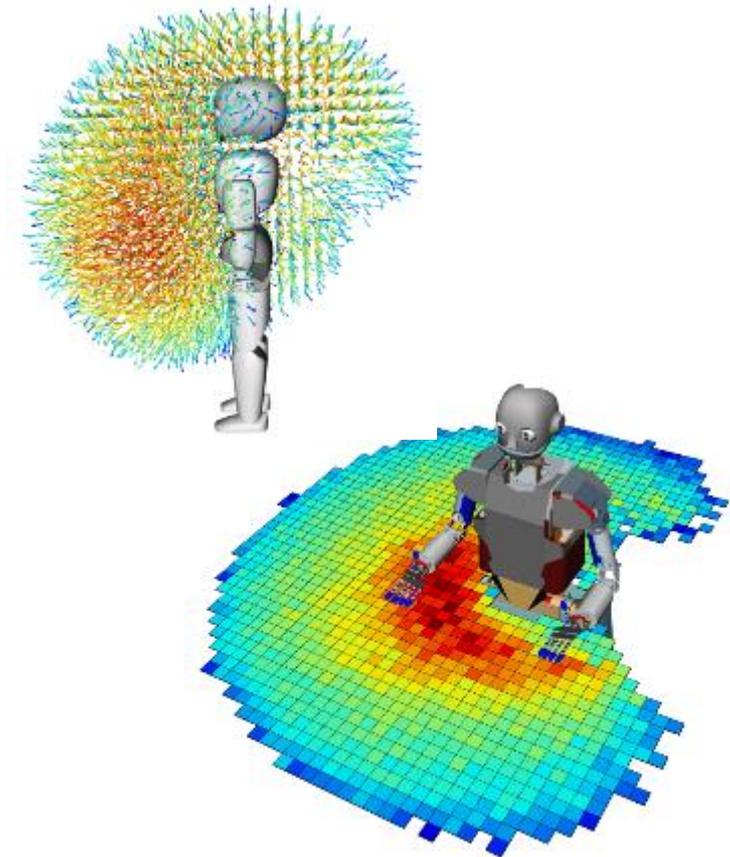
- Analyse von Gelenkwinkelkonfigurationen
- Vermeidung von Singularitäten

Inhalt

- Kinematisches Modell
 - Kinematische Kette
 - Denavit-Hartenberg Konvention
 - Direktes Kinematisches Problem
 - Beispiele
 - Jacobi-Matrizen
 - Singularitäten und Manipulierbarkeit
 - **Repräsentation der Erreichbarkeit**
- Geometrisches Modell
 - Einsatzbereiche
 - Klassifizierung
 - Beispiele

Repräsentation der Erreichbarkeit (I)

- Erreichbarer Teil des Arbeitsraums für den Roboter in \mathbb{R}^6
- Approximation durch 6-dimensionales Gitter
- Eintrag in jeder Gitterzelle:
 - **Erreichbarkeit (Reachability):**
Binär: Existiert mind. eine Gelenkwinkelkonfiguration, so dass der TCP innerhalb der 6D-Gitterzelle liegt.
 - **Manipulierbarkeit (Manipulability):**
Maximaler Manipulierbarkeitswert einer Gitterzelle, z.B. $\mu_1(\theta)$

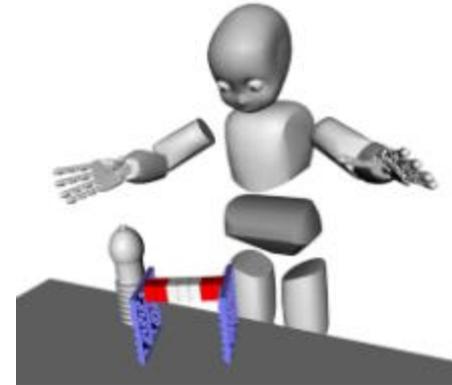


Visualisierung der Erreichbarkeit bzw. Manipulierbarkeit für die Roboter iCub und Armar-III

Repräsentation der Erreichbarkeit (II)

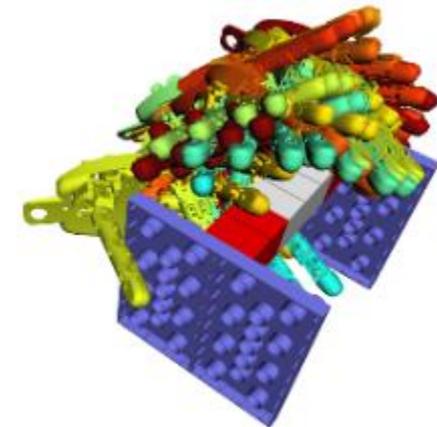
■ Erstellung

- Offline-Prozess in Simulation
- Taste alle Gelenkwinkel ab
 - in x Schritten (z.B. $x = 5^\circ$)
 - Bestimme die Lage des TCP über Vorwärtskinematik
 - Bestimme Gitterzelle und setze den Eintrag



■ Anwendung

- Vorberechnete Erreichbarkeitsinformationen
- Schnelle Entscheidung, ob eine Pose mit dem Endeffektor erreichbar ist.
Aufwand: $O(1)$
- Kann zur Griffselektion genutzt werden



Nicht erreichbare Griffe können effizient aussortiert werden.

Inhalt

■ Kinematisches Modell

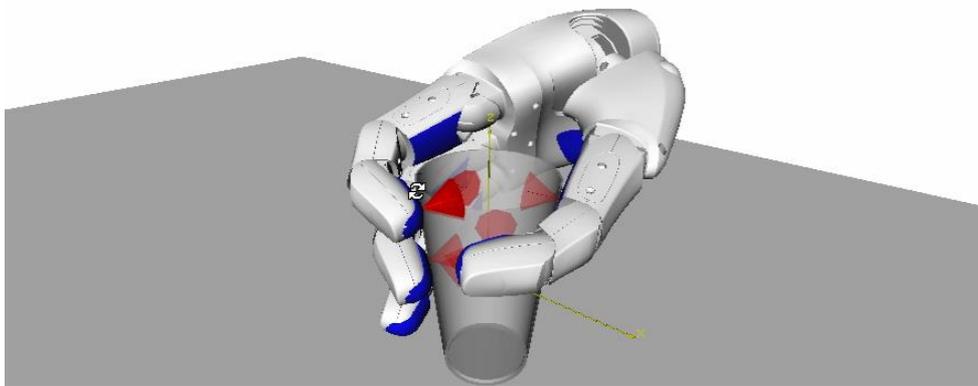
- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

■ Geometrisches Modell

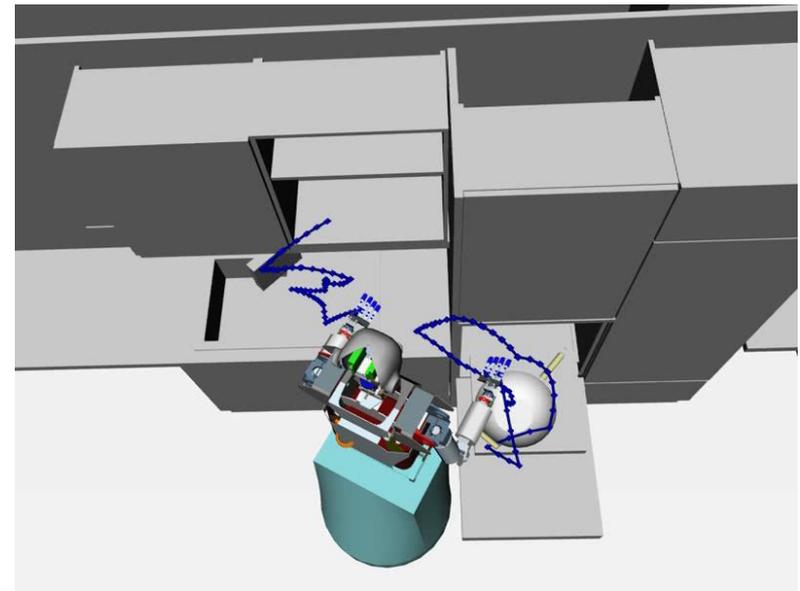
- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

Geometrisches Modell: Motivation

■ Kollisions- und Kontaktberechnung



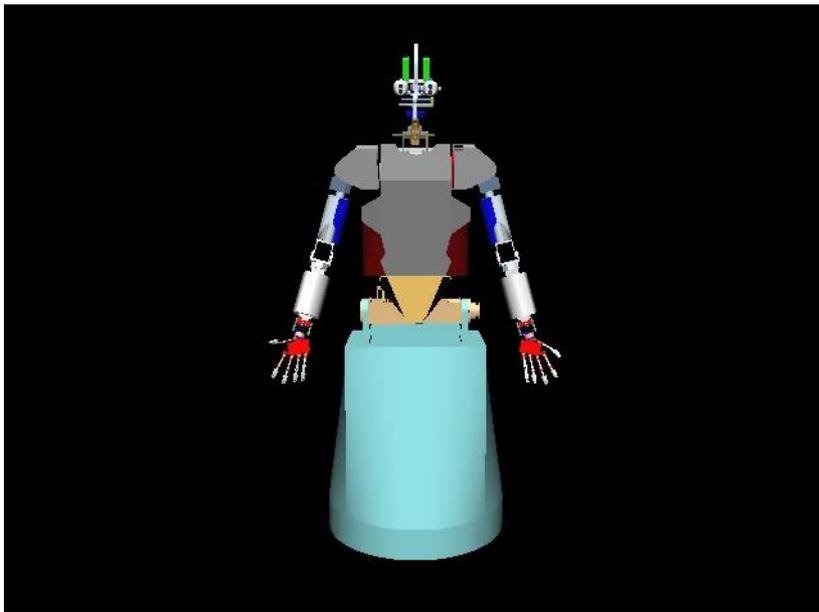
Greifen



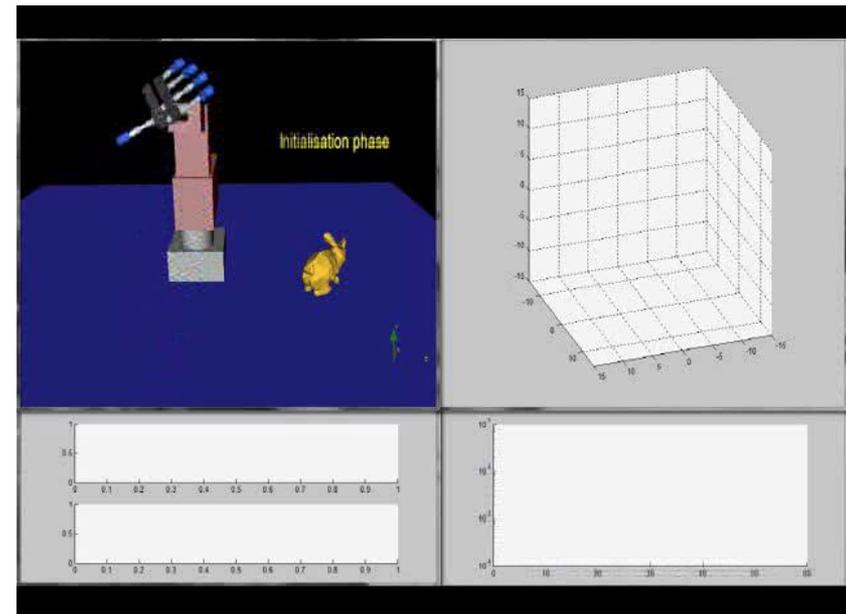
Bewegungsplanung

Geometrisches Modell: Motivation

■ Simulation



Imitation

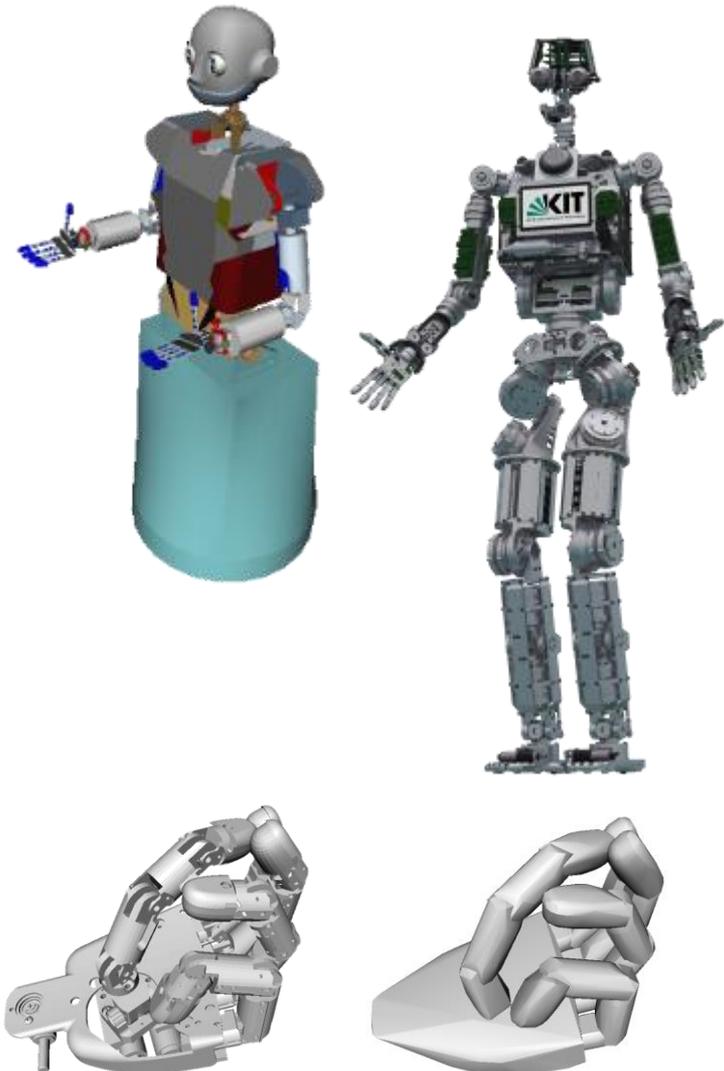


Haptische Exploration

Geometrisches Modell

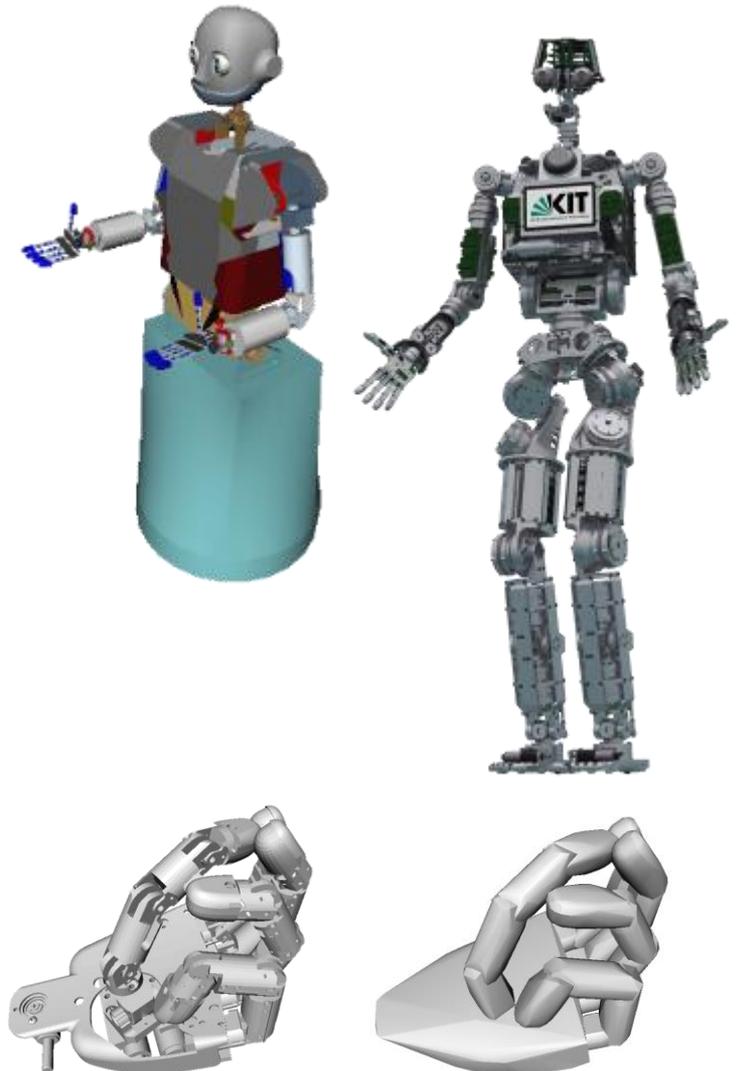
Einsatzbereiche

- Graphische **Darstellung** von Körpern
- Ausgangspunkt der **Abstandsmessung** und **Kollisionserkennung**
- Grundlage zur Berechnung der **Bewegungen** von Körpern
- Grundlage zur Ermittlung der wirkenden **Kräfte** und **Momente**



Geometrisches Modell - Klassifizierung

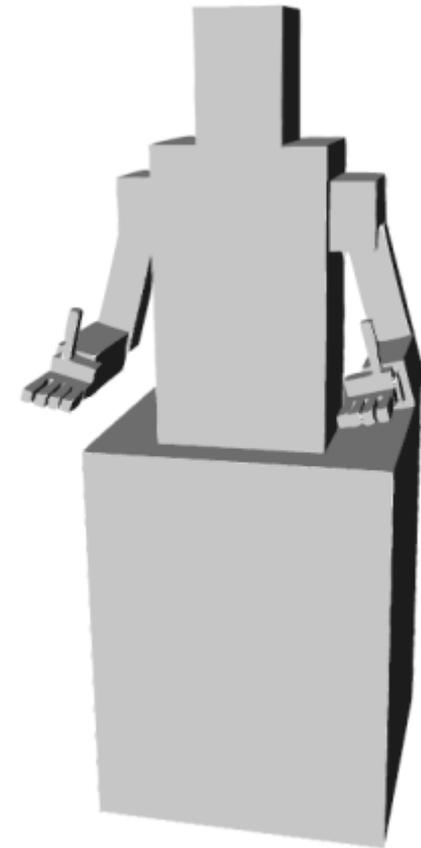
- Klassifizierung nach **Raum**
 - 2D Modelle
 - 2,5D Modelle
 - 3D Modelle
- Klassifizierung nach **Grundprimitiven**
 - Kanten- bzw. Drahtmodelle
 - Flächen- bzw. Oberflächenmodelle
 - Volumenmodell



ARMAR-III: Blockwelt

- Die Körper werden durch **einhüllende Quader** dargestellt.
- wird in den ersten Schritten der Kollisionsvermeidung benutzt.

Klasse: 2,5D, Volumen bzw. Flächen

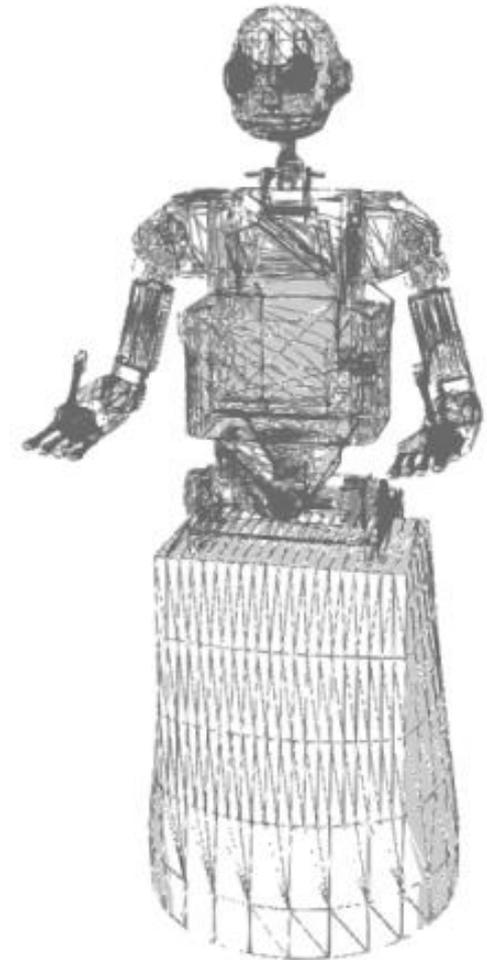


ARMAR-III Blockwelt-Modell

ARMAR-III: Kantenmodell

- Die Körper werden durch **Polygonzüge** (Kanten) dargestellt.
- wird zur schnellen Visualisierung benutzt.

Klasse: 3D, Kanten bzw. Flächen

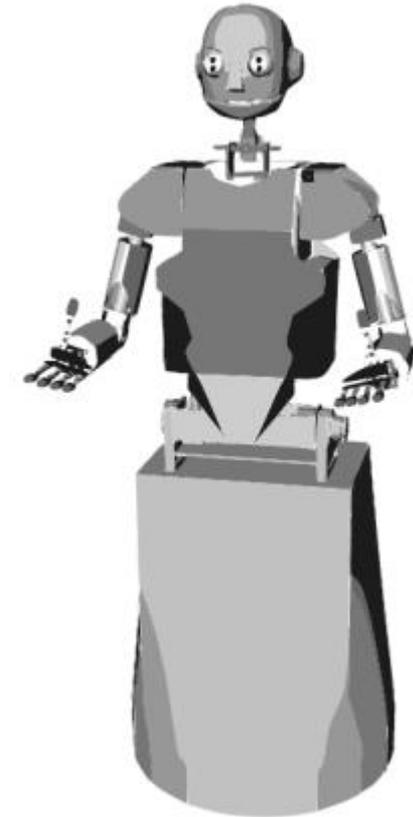


ARMAR-III Kantenmodell

ARMAR-III: Volumenmodell

- Die Körper werden **genau dargestellt**.
- wird für die Ermittlung der genauen Werte der Kollisionserkennung benutzt.
- Darstellung in der Animation.

Klasse: 3D, Volumen



ARMAR-III Volumenmodell